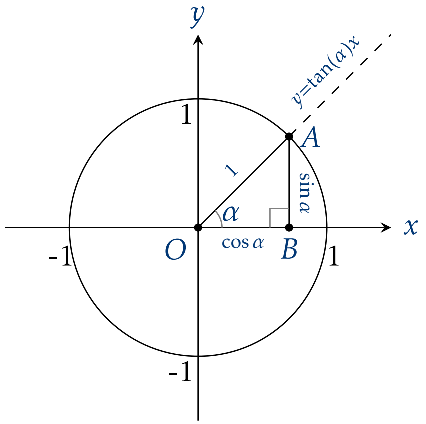
Goniometrie

door Martijn van der Horst, versie 0.4

1 Introductie

Dit bevat de benodigde goniometrie kennis voor het VWO eindexamen, volgens de "Syllabus 2022 wiskunde B VWO".

2 Basis



Figuur 1: De eenheidscirkel

De cosinus en sinus geven de coordinaten van punt $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, en de tangens geeft de richtingscoefficient van OA:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{1}$$

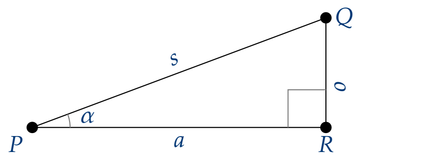
Vaak is het handig om tan meteen om te schrijven met (1), zodat je alleen met sin en cos hoeft te werken.
Met Pythagoras ($OB^2 + AB^2 = OA^2$):

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \tag{2}$$

De hoek α wordt uitgedrukt in radialen: de afstand van het punt $(1, 0)$ naar A over de eenheidscirkel, tegen de klok in. Omrekenen tussen radialen (α_r) en graden (α_g) gaat met:

$$\alpha_r = \frac{\alpha_g}{360} 2\pi \tag{3}$$

3 Rechthoekige driehoeken



Figuur 2: Een rechthoekige driehoek, met (voor hoek α) de aanliggende rechthoekszijde a, de overstaande rechthoekszijde o en de lange/schuine zijde s.

Door de driehoek in Figuur 1 te schalen met een factor s krijg je Figuur 2. Dus:

$$o = s \cdot \sin\alpha \tag{4}$$

$$a = s \cdot \cos\alpha \tag{5}$$

Meestal leer je (4) en (5) in deze vorm:

$$\sin\alpha = \frac{o}{s} \tag{6}$$

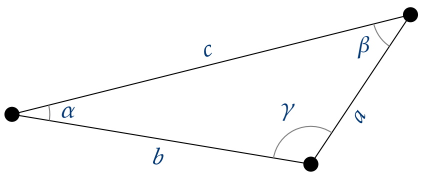
$$\cos\alpha = \frac{a}{s} \tag{7}$$

De richtingscoefficient van de schuine zijde schaalt niet, dus s valt weg (1):

$$\tan\alpha = \frac{o}{a} \tag{8}$$

De formules (6), (7), en (8) worden vaak afgekort als "sos castoa" of "solcaltoa".

4 Alle driehoeken



Sinusregel:

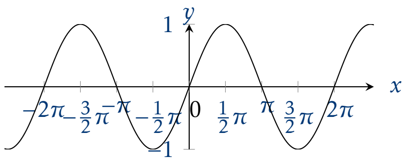
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{9}$$

Cosinusregel:

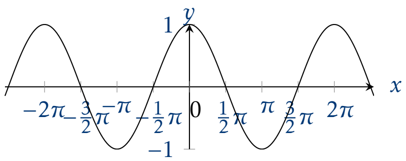
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{10}$$

Als $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, ofwel $(90°)$, dan is de driehoek rechthoekig en $\cos\gamma = 0$, dus dan wordt (10) de stelling van Pythagoras.

5 Grafieken



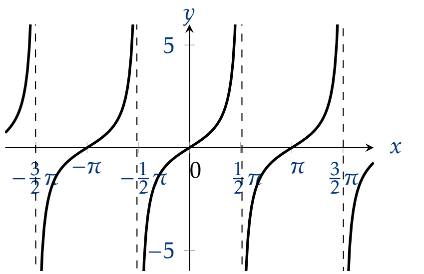
Figuur 3: Grafiek van $\sin x$



Figuur 4: Grafiek van $\cos x$

De grafiek van cos is hetzelfde als die van sin, maar verschoven in de x-richting:

$$\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \tag{11}$$



Figuur 5: Grafiek van $\tan x$

De grafiek van $\tan x$ heeft asymptoten op de plekken waar $\cos x = 0$, vanwege (1).
De grafieken zijn periodiek, sin en cos herhalen iedere 2π radialen en tan iedere π radialen. Dit komt omdat we in Figuur 1 elke $360° = 2\pi$ radialen de cirkel rond zijn (voor sin en cos) en iedere $180° = \pi$ radialen dezelfde richtingscoefficient tegenkomen (voor tan). Dus voor ieder geheel getal k geldt:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + k2\pi) \tag{12}$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + k2\pi) \tag{13}$$

$$\tan\alpha = \tan(\alpha + k\pi) \tag{14}$$

Dit betekent dat vergelijkingen zoals $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ meerdere oplossingen hebben.

6 Symmetrie

De sinus is punt-symmetrisch (Figuur 3):

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \tag{15}$$

De cosinus is spiegel-symmetrisch om de y-as (Figuur 4):

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \tag{16}$$

7 Afgeleiden

De sinus en cosinus zijn elkaars afgeleide:

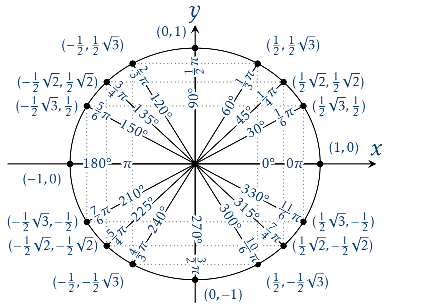
$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{18}$$

Let op het min-teken in (18).
De afgeleide van tan volgt uit (1), en de quotiëntregel met (17) en (18):

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \tag{19}$$

8 Exacte waarden



De stippellijnen geven de symmetrieën (15), (16) aan. Dus je hoeft alleen het eerste kwadrant uit je hoofd te leren.
Bij twijfel: gebruik je rekenmachine ter controle. Als, volgens je rekenmachine, $\sin^2(\frac{1}{3}\pi) = 0.75$, dan $\sin(\frac{1}{3}\pi) = \sqrt{0.75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

9 Vervormen

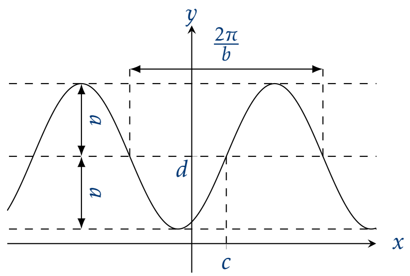
De grafieken kunnen worden verschoven en geschaald.

$$f(x) = d + a \cdot \sin(b(x - c)) \tag{20}$$

$$f(x) = d + a \cdot \cos(b(x - c)) \tag{21}$$

Hierbij noemen we:

- d De evenwichtsstand
- a De amplitude
- $\frac{2\pi}{b}$ De periode
- $\frac{b}{2\pi}$ De frequentie
- c De fase



Figuur 6: Grafiek van $d + a \cdot \sin(b(x - c))$

De grafiek voor cos kan op dezelfde manier verschoven en geschaald worden; denk daarbij ook aan (11).
Noot: met $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, en $d = 0$ krijgen we Figuur 3 en 4.
Om een gevoel bij de waardes te krijgen is deze interactieve site handig: `https://www.geogebra.org/m/CsbvUg8d`

10 Hoeken optellen

De formules in deze sectie krijg je tijdens het examen erbij, en hoef je dus niet uit je hoofd te leren.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{22}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{23}$$

Je kunt hoeken aftrekken door (22) resp. (23), te combineren met (15) en (16):

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{24}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{25}$$

Als $\alpha = \beta$ dan worden (22) en (23):

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{26}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{27}$$

Als je op (27) Pythagoras (2) toepast:

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{28}$$

11 Tot slot

De beste voorbereiding voor het examen is oefening; je moet deze informatie niet alleen kennen, je moet het ook kunnen toepassen.
Zorg dat je zeker de basis kent, de sinus- en cosinusregel, de afgeleiden, en de exacte waarden voor sin en cos in het eerste kwadrant. De rest van de informatie kun je met die kennis in een paar stappen reproduceren, al zal dat kostbare tijd kosten.

Ik vroeg aan mijn moeder of goniometrie moeilijk was. Zei ze: "Nee helemaal niet. Je moet zorgen dat je al je formules goed kent en als je meer dan 5 regels nodig hebt dan ben je op de verkeerde weg."

–Prof. Edsger W. Dijkstra